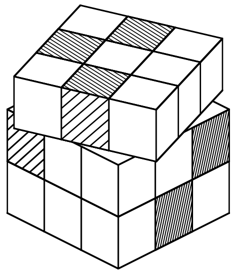
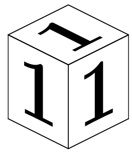




Кубик Рубика и проблема Хигмана

Объектом нашего изучения будет *кубик Рубика* и похожие на него головоломки. Прежде, чем приступить к изучению непосредственно кубика Рубика, мы решим несколько подготовительных задач.

Подготовительные задачи.

♦ **P1.** В ряд стоят 12 кубиков, пронумерованных по порядку числами от 1 до 12. (На самом левом — 1, на самом правом — 12). При каждом ударе волшебного барабана какие-то два соседних кубика меняются местами. После 333 ударов каждый кубик начинает прыгать от счастья, если видит справа от себя нечётное число кубиков с меньшим номером. Могут ли запрыгать от счастья ровно 6 кубиков?

♦ **P2.** В ряд стоят 42 кубика, пронумерованных в порядке возрастания. За один ход можно переставить местами любые два. Может ли ровно через 2008 ходов оказаться так, что первые два кубика поменялись местами, а остальные оказались на тех же местах?

♦ **P3.** По кругу стоят 20 разноцветных кубиков. За один ход можно поднять любые три и поставить первый на место второго, второй на место третьего, третий — на место первого. Могло ли так получиться, что после какого-то хода все кубики оказались сдвинуты по циклу на один по сравнению с первоначальным положением?

♦ **P4.** Грани кубика раскрашены в различные цвета. Из нескольких таких кубиков выложен прямоугольник $m \times n$. Можно выбрать любой ряд кубиков (по вертикали или горизонтали) и повернуть все кубики одновременно относительно горизонтали (или вертикали). Докажите, что все кубики можно повернуть вверх одинаковыми гранями.

A. Кубик Рубика.

Для определённости кубом будем называть весь большой куб, а кубиками — маленькие кубики, из которых он состоит. Любую грань куба, состоящую из 9 кубиков, можно повернуть по часовой или против часовой стрелки.

Можно провести несколько таких поворотов подряд, это будет называться *комбинация поворотов* или просто *комбинация.*

Грани куба будем обозначать заглавными буквами, например, A, B, C. Поворот по часовой стрелки соответствующей грани будем обозначать той же буквой, например A. Поворот против часовой стрелки A^{-1}. Комбинацию поворотов будем записывать как последовательность букв: например, запись $ABA^{-1}C$ означает, что *сначала поворачивают грань A по часовой стрелке, потом грань B по часовой стрелке, потом грань A против часовой стрелки, потом грань C по часовой стрелке.*

Для поворотов (или комбинаций) X и Y назовём их *коммутатором* комбинацию $XYX^{-1}Y^{-1}$.

Кубики бывают трёх видов: центральные — в серединах граней, угловые — в углах куба, и средние — в серединах рёбер куба. Ясно, что центральные кубики не меняют своего положения относительно друг друга, угловые всегда остаются угловыми, а средние — средними.

Представим, что средние и угловые кубики ни с чем не скреплены, то есть их можно свободно вытаскивать и переставлять. При этом средние кубики меняются местами со средними, а угловые — с угловыми так, что грани маленьких кубиков, смотрящие наружу до перестановки, остаются наружными и после неё. (Центральные же кубики никогда переставлять не будем.) Любое положение, достигаемое такой перестановкой, назовём *состоянием.* Будем говорить, что кубик, все грани которого одноцветны, находится в *правильном состоянии.* Будем говорить, что маленький кубик находится в *правильном положении*, если цвета его граней такие же, как и при правильном состоянии всего куба. Если из одного состояния можно с помощью некоторой комбинации получить другое, то эти состояния назовём *связанными. Разрешённое состояние* — состояние, связанное с правильным.

♦ **A1.** Некоторая комбинация поворотов вывела куб из начального состояния. Докажите, что если повторить ее еще несколько раз, можно опять получить начальное состояние.

♦ **A2.** Существует ли такая универсальная комбинация поворотов, применяя которую разное количество раз, можно собирать кубик из любого разрешенного положения?

♦ **А3.** Придумайте комбинацию поворотов, позволяющую циклически переставить кубики 1, 2, 3 и оставляющую остальные средние кубики на своих местах (рис. 1).

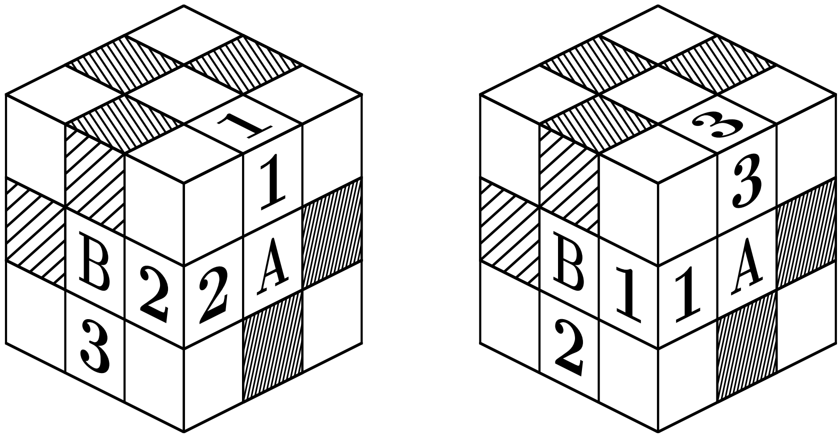


Рисунок 1.

♦ **А4.** Покажите, что комбинация $A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$ меняет местами кубики 1 и 2 и оставляет остальные средние кубики на своих местах (рис. 2).

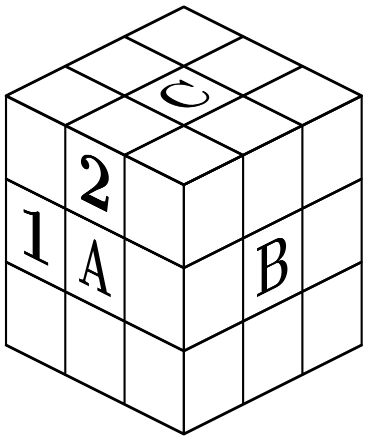


Рисунок 2.

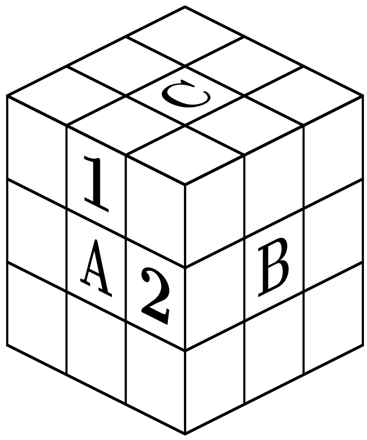


Рисунок 3.

♦ **А5.** Найдите комбинацию, позволяющую одновременно повернуть в своих гнёздах кубики 1 и 2 и оставляющую остальные средние кубики на тех же местах и в тех же положениях (рис. 3)?

♦ **А6.** Докажите, что не существует комбинации, позволяющей повернуть кубик 1 в своём гнезде и оставляющей остальные средние кубики на тех же местах и в тех же положениях (рис. 3).

♦ **A7.** Допустим, состояние куба — разрешённое. Опишите, как расставить все средние на свои места. Пусть состояние куба не обязательно разрешенное. Рассмотрите состояния средних кубиков и ппишите все связанные возможные положения.

♦ **A8.** Найдите нетривиальную комбинацию поворотов, такую, что будучи повторенной трижды, она не вызывает никаких изменений.

♦ **A9.** Придумайте комбинацию поворотов, позволяющую циклически переставить кубики 1, 2, 3 (рис. 4), не меняющую положение остальных угловых кубиков и оставляющую все средние кубики на тех же местах и в тех же положениях.

♦ **A10.** Допустим, состояние куба — разрешённое. Опишите, как расставить все угловые кубики на свои места, не меняя положений средних кубиков. Пусть состояние куба не обязательно разрешенное. Рассмотрите положения угловых кубиков и опишите возможные связанные состояния.

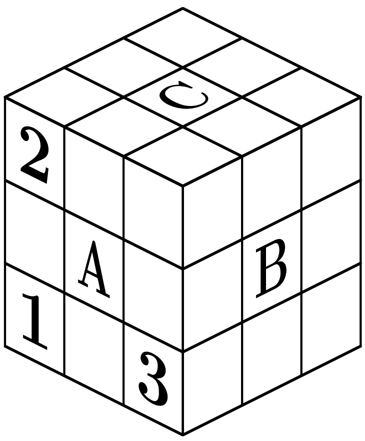


Рисунок 4.

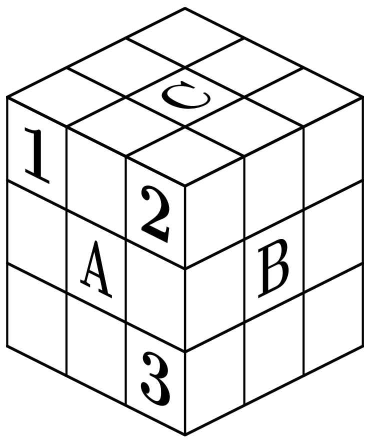


Рисунок 5.

♦ **A11.** Докажите, что не существует комбинации поворотов, позволяющих повернуть только один угловой кубик и оставляющих все остальные кубики в тех же положениях.

♦ **A12.** Придумайте комбинацию поворотов, позволяющую одновременно повернуть кубики 1, 2, 3 (рис. 5) на 120 градусов по часовой стрелке и не меняющую положение остальных кубиков.

♦ **A13.** Опишите, как собрать кубик Рубика, если известно, что состояние разрешённое.

♦ **A14.** Как по положению угловых кубиков определить, можно ли собрать кубик Рубика, если они стоят на своих местах, а средние находятся в правильных положениях?

♦ **A15.** Найдите максимальное количество попарно несвязанных состояний кубика.

♦ **A16.** Посчитайте число разрешённых состояний кубика Рубика.

Цикл B.

В задачах этого цикла мы разберём несколько похожих ловоломок. Будем считать две комбинации (поворотов) *различными*, если, применяя их к одному состоянию, мы получаем разные результаты.

♦ **B1.** На шахматной доске расставили все натуральные числа от 1 до 64. Разрешается выбрать любой квадратик 2×2 и переставить числа в нем по часовой стрелке. Докажите, что используя эту операцию, можно добиться любой расстановки.

♦ **B2.** Рассмотрим кубик $2{\times}2{\times}2$. Опишите все разрешенные состояния. Сколько их существует?

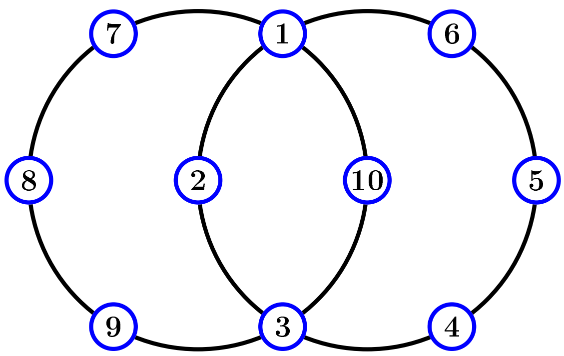


Рисунок 6.

♦ **B3.** Рассмотрим игру *«Венгерские кольца»* (рис. 6). Это плоская головоломка, состоящая из двух или более связанных овалов, на каждом из которых отмечено несколько пронумерованных кружков. Некоторые из этих кружков могут принадлежать более чем одному овалу. Ход состоит в движении одного из овалов на одно или несколько *делений*, вместе со всеми его кружками. Расстояния между кружками-делениями одинаковые. Кружок, лежащий более чем на одном овале, может двигаться вместе с любым из них. Для простоты, рассмотрим головоломку с двумя овалами, каждый из которых содержит 6 кружков.

Кружки 1 и 3 могут перемещаться с любым из овалов. Обратите внимание, что каждый ход отвечает своей перестановке на множестве чисел $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Опишите все возможные допустимые состояния.

♦ **B4.** Рассмотрим игру *«Экватор»* (рис. 7). Головоломка состоит из сферы, опоясанной 3 лентами, каждая из которых разделена на 12 частей, имеющих форму части сферы. Любые две ленты пересекаются под прямым углом и имеют два общих куска, назовем их *узлами*. Всего есть 6 узлов. Разрешено сдвигать любую ленту так, чтобы ее части переходили друг в друга. Общее число перемещающихся частей $3 \times 12 - 6 = 30$.

Опишите все возможные допустимые состояния.

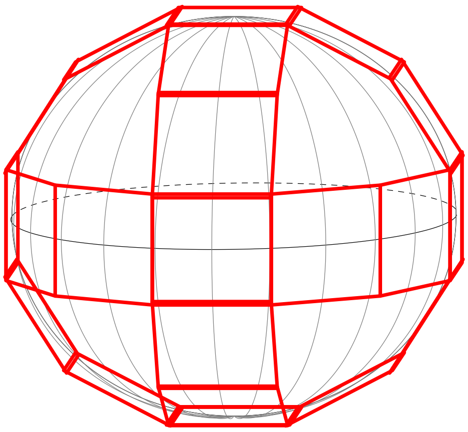


Рисунок 7.

♦ **B5.** Рассмотрим кубик 4×4×4. Опишите все возможные допустимые состояния.

♦ **B6.** Рассмотрим игру «15». В квадрате 4×4 расположены 15 пронумерованных плиток. Одно поле остаётся свободным. За один ход разрешается выбрать соседнюю по стороне со свободным полем плитку и переместить её на свободное место.

Опишите все возможные допустимые состояния игры.

♦ **B7.** Каково максимальное количество несвязанных состояний у куба 4×4×4?

♦ **B8.** Найдите систему инвариантов для куба 4×4×4.

♦ **B9.** Найдите систему инвариантов для куба $n \times n \times n$.

Цикл C.

♦ **C1.** Рассмотрим правильный тетраэдр. Его можно повернуть так, что он перейдёт в себя, но при этом какие-то вершины и ребра могут поменяться местами. Сколько различных движений существует?

♦ **C2.** Тот же вопрос для куба. Как ведут себя большие диагонали куба при движениях?

Пусть у нас есть правильный многогранник. Аналогично поворотам в кубике Рубика и других головоломках, мы можем провести комбинацию двух движений. Ясно, что эта комбинация сама по себе является движением, переводящим многогранник в себя. Будем считать такую комбинацию двух движений *произведением.*

Будем называть *единичным* такое движение при котором многогранник вообще не сдвигается, и все вершины остаются на своих местах. Если какое-нибудь движение «умножить» на единичное движение, то ничего не изменится.

♦ **C3.** Пусть есть n элементов. Рассмотрим все преобразования, переставляющие эти n элементов в другом порядке. Например, если $n = 3$, то таких перестановок 6:

1) поменять местами 1 и 2, 3 оставить на месте;
2) поменять местами 2 и 3, 1 оставить на месте;
3) поменять местами 1 и 3, 2 оставить на месте;
4) поставить 1 на место 2, 2 на место 3, 3 на место 1 (цикл длины 3);
5) поставить 1 на место 3, 3 на место 2, 2 на место 1 (второй цикл длины 3);
6) оставить все элементы на месте.

Аналогично можно выписать все перестановки в случае любого n. Произведением двух перестановок назовём перестановку, полученную применением сначала первой, потом второй. Какая перестановка будет *единичной*? Проверьте, что для каждого движения A найдётся движение A^{-1} такое, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичное движение. Проверьте выполнение закона $(AB)C = A(BC)$.

♦ **C4.** Рассмотрим множество A — все движения куба, переводящие его в себя, и множество B — все возможные перестановки четырёх элементов. Проведите соответствие между этими множествами так, чтобы произведение в одном множестве соответствовало произведению в другом.

Определение. Множество G, для которого выполнены следующие требования:

1) для любых двух элементов определено произведение, подчиняющееся ассоциативному закону $(AB)C = A(BC)$ $(A, B, C \in G)$;

2) присутствует единичный элемент $E \in G$: $AE = EA = A$ для любого $A \in G$;

3) для каждого элемента $A \in G$ есть обратный ему $A^{-1} \in G$: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$;

называется *группой*.

Группа перестановок из задачи C3 обозначается S_n.

⧫ **C5.** Докажите, что следующие множества с операциями являются группами:

1) множество целых чисел по сложению;

2) множество положительных рациональных чисел по умножению;

3) множество последовательностей поворотов кубика Рубика относительно композиции.

⧫ **C6.** Являются ли группами следующие множества:

1) множество рациональных чисел по умножению;

2) множество слов в конечном алфавите (включая пустое слово) относительно приписывания (конкатенации) одного слова к другому;

3) множество слов из букв $\{a, b, c\}$ (включая пустое слово), при условии, что можно заменять любое из слов $XabcY$, $XbcaY$, $XcabY$ на XY для любых слов X и Y (то есть вычёркивать abc, bca, cab из любых слов), а также делать обратную операцию (добавлять соответсвующие слова);

4) множество двойных транспозиций четырёх элементов $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$ и тождественное преобразование?

Примечание: запись $(123)(4567)$ означает, что в каждой скобке элементы меняются по циклу: $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и $4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4$.

Определение. Пусть G — группа, H — подмножество G. Если H содержит единицу (так мы будем называть единичный элемент) группы G, а также все произведения элементов из H и их обратные, то H называется *подгруппой*.

⧫ **C7.** Пусть H — подгруппа в G. Докажите, что H — группа.

⧫ **C8.** Найдите все подгруппы S_3.

♦ **C9. Теорема Лагранжа.** Докажите, что количество элементов в любой группе делится на число элементов в любой её подгруппе.

♦ **C10.** Найдите подгруппу из $\frac{n!}{2}$ элементов в S_n, где $n \geqslant 2$.

Группа из предыдущей задачи обозначается A_n.

♦ **C11.** Докажите, что любой элемент A_n является произведением *тройных циклов* — перестановок, представляющих собой цикл длины 3).

Определение. Элемент $aba^{-1}b^{-1}$ называется *коммутатором* элементов a и b.

Определение. *Коммутантом* группы G называется подгруппа из всевозможных произведений коммутаторов.

♦ **C12.** Найдите коммутанты групп S_3, A_3, A_4, S_n, A_n.

Выберем в некоторой группе G элемент a. Каждому элементу группы g поставим в соответствие элемент $a^{-1}ga$. Этот элемент называется сопряженным к g относительно a, или просто сопряженным.

♦ **C13.** Пусть H — подгруппа G. Докажите, что $a^{-1}Ha$ — множество элементов, сопряженных к H – тоже подгруппа. Подгруппы H и $a^{-1}Ha$ называются *сопряженными*.

Определение. Подгруппа, которая при всех сопряжениях переходит в себя, называется *нормальной*.

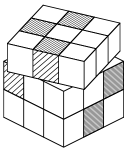
♦ **C14.** Докажите, что коммутант группы, единичный элемент и вся группа являются нормальными подгруппами.

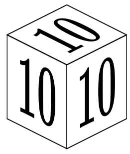
В любой группе всегда есть две *тривиальные* нормальные подгруппы – единичный элемент и вся группа целиком. Остальные нормальные подгруппы, если они есть, называются *нетривиальными*. Группы, в которых нет нетривиальных нормальных подгрупп, называются *простыми*.

♦ **C15.** При каких n S_n является простой группой?

♦ **C16.** Докажите, что A_n — простая при $n \geqslant 5$.

♦ **C17.** Каким из групп S_n или A_n соответствуют группы движений куба и тетраэдра.





♦ **C18.** Докажите, что группа движений икосаэдра соответствует A_5.

♦ **C19.** Придумайте группу из 8 элементов такую, что в ней найдутся два элемента a и b, для которых $ab \neq ba$.

Цикл D. Группы.

Определение. Группы G и H называются изоморфными, если между ними можно провести взаимно однозначное соответствие (*изоморфизм*) φ, такое, что единица переходит в единицу и произведение двух элементов в одной группе переходит в произведение соответствующих двух элементов в другой группе: $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \times \varphi(g_2)$.

♦ **D1.** Докажите, что следующие пары групп изоморфны:

1) группа движений куба и S_4;

2) группа действительных чисел по сложению и группа параллельных переносов вдоль оси OX;

3) группа целых чисел по сложению и группа чисел вида 2^k (для целых k) по умножению;

4) группа движений додекаэдра (икосаэдра) и A_5.

Изоморфные группы, это, в некотором смысле, одинаковые группы.

Пусть G — группа, M — множество. Говорят, что G *действует* на M, если каждому $m \in M$ и $g \in G$ соответствует элемент $m' = g(m)$, при этом $(g_1 g_2)m = g_1(g_2 m)$ для любого $m \in M$.

Примеры.

1. Группа всех движений действует на трехмерном пространстве.

2. Группы S_n и A_n действуют на множестве $\{1, \ldots, n\}$.

3. Группа действует сама на себе *левыми умножениями*: каждый элемент $h \in G$ определяет отображение $\varphi_h(g) = hg$.

4. Группа G действует сама на себе сопряжениями: каждому $h \in G$ соответствует отображение $\varphi_h(g) = h^{-1}gh$.

♦ **D2.** Проверьте, что это действительно действия.

♦ **D3.** Пусть n — количество элементов в группе G (обозначение $n = |G|$). Докажите, что в S_n можно найти подгруппу, которая изоморфна G.

♦ **D4.** Группа G раскрашена в несколько цветов так, что цвет произведения зависит только от цветов сомножителей. Единица красная. Докажите, что множество красных элементов образует нормальную подгруппу.

Пусть H подгруппа в G. *Левой раскраской* называется раскраска элементов G в несколько цветов, такая, что

1) для любого $g \in G$ и $h \in H$ элементы g и hg раскрашены в один цвет;

2) если g_1 и g_2 раскрашены в один цвет, то $g_1 = hg_2$ для некоторого $h \in H$.

Аналогично определяется правая раскраска.

♦ **D5.**

a) Докажите, что левая раскраска совпадает с правой тогда и только тогда, когда H — нормальна.

b) Докажите, что если H — нормальна, то цвет произведения однозначно определяется цветами сомножителей, а цвет обратного элемента однозначно определяется цветом элемента.

Пусть H — подгруппа в G. Для любого $g \in G$ можно рассмотреть множество gH — совокупность элементов gh_i для различных $h_i \in H$. Это множество называется *левым классом смежности по подгруппе* H (обратите внимание, что это то же самое, что одноцветные элементы при левой раскраске). Каждый элемент G лежит в каком-то смежном классе, причем, только в одном. Два элемента лежат в одном и том же классе, если они оба представляются в виде gh_i для различных элементов $h_i \in H$. Каждый элемент $g_1 = g_1 e$ содержится в классе $g_1 H$ (так как $e \in H$). Элемент g_2 попадает в этот же класс, если существует такой h, что $g_2 h = g_1$, или, что тоже самое, $g_1 g_2^{-1} = h$.

Произведением двух смежных классов $g_1 H$ и $g_2 H$ назначим смежный класс $g_1 g_2 H$. Конечно, мы можем выбрать других представителей этих двух смежных классов, например, $g_1' \in g_1 H$ и $g_2' \in g_2 H$. вместо g_1 и g_2. Тогда произведением будет класс $g_1' g_2' H$.

♦ **D6.** Докажите, что произведение не зависит от выбора представителей, то есть $g_1 g_2 H = g_1' g_2' H$.

Аналогично можно назначить обратный элемент на множестве смежных классов: обратным к классу gH будет класс $g^{-1}H$.

Множество смежных классов (или множество цветов из задачи D5) можно рассматривать как группу. Эта группа называется *факторгруппой* по нормальной подгруппе. Ее элементами являются смежные классы.

♦ **D7.** Найдите факторгруппы G по H:

1) $G = S_n$ и $H = A_n$;

2) $G = A_4$ и H — группа двойных транспозиций четырёх элементов $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$ плюс тождественное преобразование;

3) G — группа действительных чисел по сложению и H — подгруппа целых чисел.

♦ **D8.**

a) Докажите, что группа комбинаций поворотов кубика 2×2×2 есть факторгруппа группы комбинаций поворотов кубика Рубика 3×3×3.

b) Докажите, что группа комбинаций поворотов кубика Рубика 3×3×3, а также кубика 4×4×4 есть факторгруппа группы поворотов кубика 5×5×5.

Определение. Орбитой элемента $m \in M$ называется множество $\{g_i m\}$ для всех различных $g_i \in G$.

♦ **D9.** Опишите орбиты элементов при следующих действиях:

1) угловой кубик при действии группы комбинаций поворотов кубика Рубика;

2) произвольная точка плоскости при действии группы параллельных переносов вдоль оси OX;

3) цикл из трех элементов при действии группы перестановок на себе сопряжениями.

♦ **D10.** Докажите, что любые две орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть задано действие φ группы G на множестве M. Некоторые элементы группы не сдвигают элементов множества:

Определение. Стабилизатором элемента $m \in M$ называется множество элементов $g \in G$ таких, что $g(m) = m$.

Определение. A set of elements $g \in G$ is called a *stabilizer* of en element $m \in M$ if $g(m) = m$.

♦ **D11.** Докажите, что стабилизатор $\operatorname{Stab} m$ есть подгруппа. Докажите, что $|O_m| \cdot |\operatorname{Stab} m| = |G|$.

Определение. Действие называется *хорошим*, если стабилизатор любого элемента состоит из одной единицы.

Определение. An act is called *good* if stabilizer of any element is unity only.

Рассмотрим два действия группы G на множествах M_1 и M_2. Пусть множества взаимно однозначно соответствуют друг другу: каждому элементу M_1 соответствует свой элемент M_2, и наоборот: $\Psi(M_1) = M_2$. Тогда эти два действия φ и ψ называются одинаково устроенными или *сопряженными*, если группа действует на этих множествах одинаковым образом: элементы $g_\varphi(M_1)$ и $g_\psi(M_2)$ соответствуют друг другу при отображении Ψ.

В качестве множеств M_1 и M_2 может выступать одно и тоже множество M.

♦ **D12.** a) Пусть даны два хороших действия G φ_1 и φ_2 на множестве M. Обязательно ли они сопряжены?

b) Пусть даны два хороших действия G φ_1 и φ_2 на множестве M и количество орбит в этих действиях одинаково (либо счетно в обоих случаях). Докажите, что они сопряжены.

Пусть G — группа, g — ее элемент. Вместе с каждым элементом h можно рассмотреть элемент $g^{-1}hg$. При этом, произведению h_1h_2 соответствует элемент $g^{-1}h_1gg^{-1}h_2g = g^{-1}h_1h_2g$. То есть, $h \to g^{-1}hg$ — взаимно однозначное соответствие, которое произведение переводит в произведение. Таким образом, получается изоморфизм группы на себя.

♦ **D13.** Пусть G — группа, H_1 и H_2 — изоморфные подгруппы, $\varphi : H_1 \to H_2$ – изоморфизм. Всегда ли φ можно продолжить до изоморфизма всей группы на себя?

♦ **D14.** Пусть G — группа, H_1 и H_2 — изоморфные подгруппы G такие, что количества элементов в смежных классах по H_1 и по H_2 одинаковы (либо счётны в обоих случаях). Докажите, что тогда существует такая группа $G^{'}$, что G — её подгруппа в $G^{'}$ $t \in G'$ и в этой группе для любого $h \in H_1$ выполнено:

$$tht^{-1} = \varphi(h) \in H_2.$$

♦ **D15.** То же, но если в H_1-классах и H_2-классах не обязательно равное количество элементов.

Определение. Группа G *порождена элементами* x_i (мы будем писать $G = \langle x_i \rangle$), если любой элемент из G является произведением каких-то элементов из $\{x_i\}$.

Определение. Группа называется *n-порождённой*, если $\{x_i\}$ состоит из n элементов.

Определение. Группа называется *свободно n-порождённой*, если она изоморфна группе слов в алфавите $\{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, \ldots, g_n, g_n^{-1}\}$.

♦ **D16.** Пусть группа G содержит пары изоморфных подгрупп $\varphi_i : H_i \to H_i^{'}$ при $i = 1 \ldots n$. Докажите, что тогда существует такая группа $G^{'}$, что G — её подгруппа и в этой группе выполнено:

1) $t_i h_i t_i^{-1} = \varphi_i(h_i)$;

2) $\langle t_i \rangle$ порождена ими свободно.

♦ **D17.** Докажите, что если группа G свободно порождена элементами t_i $i \in \mathbb{N}$, то существует изоморфизм между G и $H = \langle t_2, t_3, \ldots \rangle$.

♦ **D18.** Докажите, что любая счетная группа может быть представлена в качестве подгруппы 3-порождённой группы.

Цикл E. Группы и сборка кубика Рубика высших порядков

Мы говорим, что куб *почти собран*, если все кубики стоят на своих местах, но возможен непорядок с ориентацией. Следующие несколько пунктов относятся к почти сборке кубика.

♦ **E1.** a) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с одной общей вершиной. Докажите, что они порождают всю группу S_7.

b) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с парой общих соседних вершин. Докажите, что они порождают всю группу S_6.

♦ **E2.** a) Покажите, что группа A_{12} порождается 11-членными циклами.

b) Пусть $x \in S_8$. Докажите, что тогда $x^{8!}$ есть единичная перестановка. Пусть s – 11-членный цикл. Докажите, что тогда $s = t^{8!}$ для некоторого 11-членного цикла t.

c) Докажите, что если переставить в кубе $3\times3\times3$ средние и угловые кубики перестановками одинаковой чётности, то кубик почти собирается.

d) Докажите, что любая расстановка в кубике $4\times4\times4$ почти собирается.

Определение. Говорят, что группа G является *прямой суммой* групп G_1 и G_2, если она состоит из пар (g_1, g_2), таких что $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. При этом произведение пар подчиняется закону $(g_1, g_2)\times(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2)$. Прямая сумма обозначается как $G = G_1 \oplus G_2$.

♦ **E3.** Пусть G_1 есть простая конечная группа с образующими $a_1, \dots, a_k$, G_2 есть простая конечная группа с образующими $b_1, \dots, b_k$, $G = G_1 \oplus G_2$, H есть подгруппа в G порожденная элементами $z_i = (a_i, b_i), i = 1, \dots, k$. Докажите, что либо $H = G$, либо для некоторого изоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ выполняется равенство $b_i = \varphi(a_i)$. Докажите, что группа комбинаций поворотов кубика $3\times3\times3$ содержит $A_8 \oplus A_{12}$ в качестве подгруппы.

♦ **E4.** Докажите, что любая расстановка в кубике $2n\times2n\times2n$ почти собирается.

♦ **E5.** Докажите, что куб $2\times\ldots\times2$ почти собирается в любой размерности.

♦ **E6.** Докажите, что куб $(2n)^m$ почти собирается в любой размерности.

Из того факта, что куб $2\times2\times2\times2$ почти собирается, следует полезное наблюдение. *Пусть можно развернуть k угловых кубиков. Тогда можно развернуть любые другие k угловых кубиков аналогичным образом.* Это помогает исследовать ситуацию с полной сборкой кубика.

♦ **E7.** Докажите, что в четырёхмерном пространстве куб $2\times2\times2\times2$ имеет 3 класса связанных состояний. *Указание: Используйте то, что фактор-группа A_4 по группе пар транспозиций (пример 2 из задачи D7) это группа из трёх элементов.*

♦ **E8.** Докажите, что в пространстве размерности 5 и выше у куба $2\times2\times\ldots\times2$ все состояния разрешённые (инвариантов нет).

♦ **E9.** Найдите число классов связанных состояний у куба $3\times3\times\ldots\times3$ для пространств размерности 4 и выше.

♦ **E10.** Найдите число классов связанных состояний у куба $n\times n\times\ldots\times n$ для пространств размерности 4 и выше.